

УДК 51:1+51 (091)

А.В. Винобер

Фонд поддержки развития биосферного хозяйства и аграрного сектора
«Сибирский земельный конгресс», Иркутск, Россия

ЭТОС МАТЕМАТИКИ. ОЧЕРК ПЕРВЫЙ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ: ИНСАЙТЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Настоящий очерк является началом четвертого цикла философских этюдов о математике – это субъективный взгляд со стороны гуманитария, лишённого пиетета перед сакральными и мифологическими традициями науки математики, но питающего неистощимый интерес к математическому творчеству и философскому смыслу всей категории математики. Очерки (этюды или штудии) представляют собой поток свободных ассоциаций на тему прочитанного и осмысленного в разное время и ориентированны прежде всего на аудиторию читателей, которым не безразлична судьба естественной человеческой науки в XXI веке. В настоящем очерке автор рассматривает математическое мышление, эволюцию доказательства, статус истины, притязания математики и феномен инсайта.

Ключевые слова: этос математики, математическое мышление, доказательство, инсайт, психология математического творчества

1. Краткая предыстория.

Настоящий очерк является началом четвертого цикла философских этюдов о математике. Ранее были представлены: 1. «Введение в философию математики и системного анализа» [7]. 2. «Вольные философско-математические штудии» [8]. 3. «Гуманитарная археология математики» [9]

В седьмом очерке «Гуманитарная археология математики. Очерк 7. Первые итоги» [6] я предварительно анонсировал четвертый цикл под названием «В дебрях математического мира» (или, как думал еще «В дебрях математических джунглей»). Но вскоре натолкнулся на интервью известного математика Максима Концевича [24] и решил назвать новый очерк «Математическое мышление: инсайты и доказательства», а весь новый цикл (или четвертый сборник философских этюдов по математике) поименовал «Этос математики».

Кратко: этос – обобщенная характеристика культуры данной социальной общности или индивида, выраженная в системе господствующих ценностей и норм поведения. Естественно, что это субъективный взгляд со стороны гуманитария, лишённого пиетета перед сакральными и

мифологическими традициями науки математики, но питающего неистощимый интерес к математическому творчеству и философскому смыслу всей категории математики. Очерки (этюды или штудии) представляют собой поток свободных ассоциаций на тему прочитанного и осмысленного в разное время и ориентированны, прежде всего, на аудиторию читателей, которым не безразлична судьба естественной человеческой науки в XXI веке. Будет ли такая наука в веке XXII – я сильно сомневаюсь.

Как отмечал в прошлом, не так давно ушедшем веке, известный российский философ Лев Платонович Карсавин: «Истории будущего в качестве конкретной науки нет, не должно быть, и не может быть, ибо иначе утратило бы свой смысл само историческое развитие. История – в собственном смысле слова – наука о конкретном прошлом, хотя прошлое и не познаваемо без настоящего и будущего» [22].

2. Прологомены ко всякой возможной критике.

Отчасти подражая Иммануилу Канту, одному из немногих великих философов, уделявших особенное внимание глубинным смыслам математического познания и говорившему (писавшему) о математике: «Тут мы имеем дело с великим и испытанным познанием, объем которого и теперь изумительно обширен, в будущем же обещает безграничное расширение – с познанием, имеющим в себе совершенно аподиктическую достоверность, т.е. абсолютную необходимость, не основанным, следовательно, ни на каких опытных основаниях, представляющим собой, поэтому, чистый продукт разума, и наконец, сверх того – с познанием вполне синтетическим: как же возможно человеческому разуму произвести такое познание совершенно a priori? Не представляет ли эта способность – так как она не опирается и не может опираться на опыт – не предполагает ли она какой-нибудь априорной основы познания, которая лежит глубоко скрытою, но должна открыться через эти свои действия, если только проследить прилежно их первые начала?» [20], имею намерение заявить (что и делаю по-существу): я глубоко

сомневаюсь как в аподиктической достоверности, и априорном характере математического знания, так и в наличии какой-либо вневременной, и тем более, абсолютной истины. Хотя, естественно, абсолютно не исключаю ни того, ни другого.

В некоторой степени считаю себя конвенционалистом, эклектиком, релятивистом и анархистом (в смысле П.Кропоткина и П.Фейерабенда) – все это необходимые аспекты научного познания, которые позволяют мне исповедовать разноплановую методологию, лишенную категорических утверждений и всевозможных кафедральных «измов».

Следуя Г.Гадамеру: «Предрассудки в гораздо большей степени, чем рефлексия, суждения и т.п., составляют историческую действительность бытия человека» [11].

Я считаю, что всякое суждение, как и в целом процесс познания, имеют вероятностный характер. И здесь я вполне разделяю утверждение М.Полани: «Противоречие может быть установлено только актом личной оценки, который отвергает определенные возможности как слишком маловероятные для того, чтобы быть истинными» [41].

3. Философские основания для дальнейших рассуждений.

Как я уже отмечал чуть ранее, вполне разделяю анархистские идеи П.Фейерабенда по отношению к сакральности научного знания.

«Наука гораздо ближе к мифу, чем готова допустить философия науки. Это одна из многих форм мышления, разработанных людьми и не обязательно самая лучшая» [51].

Я также вполне приемлю (но с определенной долей критической условности) репрезентативный подход М.Вартофского: «Всё что угодно (в самом сильном безусловном смысле этого словосочетания) может быть репрезентацией всего остального» [3].

Этот принцип, ранее сформулированный русским философом Н.О. Лосским (о чем я неоднократно отмечал в своих публикациях) звучит как: «Всё имманентно всему» [27]. И, опережая события, скажу, что этот принцип

имеет колоссальное значение для методологии и философии математики, но до настоящего времени не является глубоко осмысленным.

4. Этос науки.

Как отмечал в прошлом веке известный социолог Роберт Мертон: «Этос науки включает в себе функционально необходимое требование, чтобы теории, или обобщения, оценивались под углом зрения их логической непротиворечивости и согласия с фактами» [31].

Под этосом науки Р.Мертон подразумевал эмоционально окрашенный комплекс правил, предписаний, нравов, представлений, ценностей и допущений, которые считаются обязательными для ученого. Этос, как и вообще все социальные коды, поддерживается чувствами тех, к кому он имеет отношение. Чувства, воплощенные в этосе науки, описываются такими понятиями, как интеллектуальная честность, неподкупность, организованный скептицизм, бескорыстность, безличность и т.п.» [31].

Еще ранее, Макс Вебер, касаясь аксиологии науки, утверждал, что «вера в ценность научной истины не что иное, как продукт определенной культуры, а совсем не данное от природы свойство» [4].

В определенной степени к этой же сфере можно отнести и высказывание Стивена Тулмина: «Мысли каждого из нас принадлежат нам самим, наши понятия мы разделяем с другими людьми» [49]. Если трактовать это высказывание с точки зрения этоса науки, оно может означать следующее: мыслить мы можем как угодно и что угодно, но выражать результаты своего мышления мы должны общепринятым и доступным для научного сообщества языком.

Перефразируя В.В. Налимова: «Культура в целом задается упорядоченностью смыслов в семантическом вакууме» [35], возможно сказать, что культура этоса науки задается соблюдением общепринятых смыслов в семантическом пространстве научного сообщества.

5. Мышление вообще.

Так как большинство современных математиков и математиков прошлых эпох часто заявляют об исключительной, неповторимой особенности математического мышления, превосходящего любые другие формы и разновидности мышления нематематического, то нам, уважаемый читатель, придется совершить небольшой экскурс в область или страну мышления, человеческого мышления вообще, которое (на первый взгляд) не использует ничего математического. Для этой цели в качестве отправной точки используем простые определения.

1) Мышление – процесс познавательной деятельности человека, характеризующийся активным, обобщенным и опосредованным отражением действительности [45].

2) Мышление – одно из высших проявлений психического, процесс познавательной деятельности индивида, характерный обобщенным и опосредованным отражением действительности; это анализ, синтез, обобщение условий и требований решаемой задачи и способов их решения [44].

Психология мышления изучает ряд разновидностей мышления, в т.ч. мышление практическое и теоретическое.

В истории философии процесс мышления один из основных объектов исследования на протяжении двадцати пяти веков античной и европейской философии. Еще ранее, мышление исследовалось в Шумере, Древнем Египте, Древнем Китае, Древней Индии и в Крито-Минойской цивилизации – но мы об этом мало чего знаем, потому как в современной философии по-прежнему доминирует евроцентризм.

Древнегреческий философ Анаксагор считал, что мышление является первоначалом мирового порядка.

Аристотеля принято считать первым «технизатором» мышления. Аристотель предпринял первую попытку формализации мышления посредством формирования системы норм и правил.

Как объект исследования, мышление активно препарируется и исследуется (с конца XIX века) многими философскими и психологическими направлениями и школами.

Здесь я оставляю без внимания средневековую схоластику, Н.Кузанского, Дж.Бруно, Дж.Вико, Р.Декарта, Б.Спинозу, Б. Паскаля и Г. Лейбница (и многих других).

Философы выделяют три типа мышления.

1) Онтологическое, где мышление есть особая субстанция, мир, пространство.

2) Процессуальное – где мышление есть особая деятельность, которая подлежит нормировке и организации. Требуется к себе технического отношения, является объектом формализации, проектирования и моделирования (здесь прослеживается в XX веке линия А.А.Богданов-Г.П.Щедровицкий). Здесь же линия развития математического логицизма и формализации (Г.Лейбниц, Дж.Буль, Г.Фреге, А.Уайтхед, Б.Рассел, Л.Витгенштейн, Д.Гильберт).

3) Dasein-мышление – где мышление есть феномен, который либо присутствует, либо отсутствует в ситуации, может быть обнаружен и зафиксирован [30].

В результате все усилия философов и психологов XX века создали сложную интеллектуальную ситуацию плюралистического, полилогического и поливиртуального мышления.

Мышление, как центральный элемент познавательной деятельности – главная линия евроцентристской философии: Р.Декарт-Г.Лейбниц-И.Кант-Г.Гегель-Б.Больцано-Э.Гуссерль-Л.Витгенштейн-М.Хайдеггер и др.

Особое направление исследования мышления – мышление в языке. Языковое мышление – объект внимания многих философов и ученых (В. Гумбольдт, А.Ф. Потенция, Л. Витгенштейн, Л.С. Выготский, Г.Гийом и др.).

Математики часто отрицают значение языка в математическом творчестве (далее по тексту вернемся к этому вопросу). Грубо говоря, если

для философов (особенно экзистенциального толка) главным в мышлении является смысл, для математиков (в большинстве случаев) – главным является значение. Это не означает, что я пытаюсь лишить математиков смысла, но значение знака для них очень часто важнее смысла онтологического и экзистенциального понимания процесса мышления.

Так как в процессе рассуждения мы вышли на процесс понимания, считаю целесообразным в нескольких словах коснуться таких интеллектуальных феноменов как понимание и понятие.

«Понимание – универсальная, рациональная форма освоения действительности, постижение и реконструкция смыслового содержания реальности», и также «способность субъекта уяснить смысл, значение, замысел, акты поведения другого субъекта, события, явления и процессы окружающего мира» [45].

Бывают случаи отрицания значения понятий для процесса мышления, но это скорее, ненаучный подход. Так как, любая научная отрасль или направление практически всегда базируется на определенной системе понятий, это касается как гуманитарных, так и точных дисциплин, то следует рассмотреть в первом приближении термин «понятие».

«Понятие – форма мышления, в котором отражаются существенные признаки» [45].

Британский философ Дж.Мур полагал, что понятие не входит в содержание сознания и является независимым и неизменяющимся объектом мышления [34].

Я считаю, что термин «понятие» гораздо более гибкий и многозначный. И когда мы говорим «понятийное мышление», мы подразумеваем, что в мышлении доминирует процесс оперирования, манипулирования и переоценки понятий. Естественно, что «понятийное мышление» более характерно для сферы теоретического мышления, герменевтики, лингвистической философии и математического мышления, а

также (в разной степени) для любого интеллектуального и познавательного мышления.

В философии – понимание – чаще всего объект герменевтических исследований. Исходно – понимание – есть обнаружение смысла текста. Гуманитарное и математическое понимание существенно различны. Для гуманитарного характерно внимание к индивидуальному, неповторимому. Для математического – важны инварианты, универсалии, а также типичное и однозначное, т.е. толкование знаков, формул и моделей предпочитается однозначное и категоричное. Если у гуманитария инакомыслие и многомыслие считаются творческим преимуществом (как правило), то для математика важна предельная унификация смысла-значения выражения или закономерности. Грубо говоря, для математика знак π означает одно и то же в Европе, в Америке и в Африке, то для гуманитария понятие «смысл» везде бывает разным и редко случается консенсус, который предельно необходим математической науке.

Понимание в философии – чаще, способ бытия человека в мире. В математике – понимание – это способ познания мира или математической реальности. Еще раз – философия – это, по преимуществу, поиск смысла. Математика – по преимуществу, переписывание или предписывание значений.

Рефлексия и интроспекция имеют гораздо меньшее значение для математика, чем для философа.

Для примера (относительно условного).

А.Гротендик «ударился» в рефлексию и интроспекцию (медитацию) и резко отдалился от математики. Похоже, что аналогичный случай произошел и с Григорием Перельманом. В психологическом смысле эти случаи, конечно, не идентичны. Но в них прослеживается немало общих черт.

6. Математическое мышление.

Надо сказать, что феномен математического мышления до настоящего времени остается малоисследован. Хотя актуальность такого исследования

особенно важна для когнитивной психологии и искусственного интеллекта, да и для целей собственно математического обучения и образования.

В качестве небольшого отвлечения, неуходящего от математического мышления: «Размышление – это роскошь... Наша личность, строящаяся каждое мгновение из наколенного опыта, постоянно меняется... Мы творим себя непрерывно. Мир, с которым имеет дело математик, есть мир умирающий и возрождающийся каждое мгновение» [2]

Вот и подумайте, как тут исследовать математическое мышление, если оно пульсирует, появляется и вновь исчезает где-то в дебрях обыденного мышления....

Гаусс, Пуанкаре, Харди и Адамар (как и многие другие) нередко говорили о чувстве математической красоты. «Это постоянное эстетическое чувство, знакомое всем настоящим математикам... Воистину, здесь налицо чувство!» [42]. Еще Пуанкаре часто говорил о том, что математиками рождаются. Давайте зададим себе простой вопрос: математическое чувство красоты – это действительно генетически наследуемое врожденное чувство или эстетическое качество личности, приобретенное в процессе обучения и воспитания (социализации)? И, скорее всего, если мы мыслим строго математически, или строго психологически, мы ответим, что это эстетическое чувство есть результат социализации и освоения техники и технологии математического мышления. Возможно, многие со мной не согласятся, но это мое убеждение и результат опыта наблюдений и исследований.

Скажите, много ли может достичь самоучка в современной математике? Галуа, Абель, Рамануджан, и тот же А.Гротендик – все у кого находили гениальный дар самообучения в математике – все они прошли определенную школу начального обучения математике.

«Изобретение – это выбор: этим выбором повелительно руководит чувство научной красоты», – утверждает Ж.Адамар в своей, часто цитируемой математиками книге «Исследование психологии процесса

изобретения в области математики» [1]. Но при этом забывают «классические случаи» открытия заново математических законов, которые имели место у гениально одаренных математиков: Паскаля, Гаусса, Рамануджана, Гротендика и др. То есть, прежде чем выбирать – надо знать, из чего выбирать. Надо иметь представление и знание о математической реальности уже открытой другими математиками, иначе мы обречены на «вечное» изобретение давно открытых законов и теорем. В частности, Морделл приводит случай, когда один известный европейский математик спустя 125 лет переоткрыл теорему Коши [33].

Это он приводит в качестве примера того, что память у математиков не идеальная, и признается сам, что не обладает надежной памятью. То же самое о себе говорил последний великий математик Анри Пуанкаре, что он нередко ошибается при арифметических вычислениях [42].

В книге (вышеназванной) Ж.Адамара немало психологических казусов (о чем я уже говорил в более ранних публикациях). И это не удивительно. Он ведь не психолог, а математик, который будучи пенсионером (в нашем российском понимании) подготовил цикл лекций по психологии математического творчества для американских студентов (большинство из которых ни тогда, ни сейчас, «с неба звезд не хватало»). «Для меня несомненно, что память принадлежит к области бессознательного» [1]. Если бы вся память принадлежала к области бессознательного, то каким бы образом наше сознание и наше мышление могли бы произвольно извлекать из памяти необходимую информацию?

В другом случае, он роняет великую фразу: «Здравый смысл, т.е. наше бессознательное...». Это, видимо означает, что здравый смысл функционирует вне нашего сознания и это похоже на «автопилот». Мне казалось, здравомыслие – это всегда признак ясного сознания и осознанного мышления.

Таким образом, роль и значение бессознательного в математическом мышлении весьма значительны, но определить степень влияния на результативность проявлений бессознательного крайне сложно.

«Процесс творческой работы (где определяющую роль играет математическое мышление – А.В.) непременно включает интуицию. Он складывается из следующих этапов: за первый присест не удастся сделать ничего путного» [42]. Затем наступает более или менее длительный перерыв, в течение которого совершается бессознательная работа; после этого наступает новый этап сознательной работы, который кажется таким же безрезультатным; но внезапно появляется решающая мысль; последний этап – обязательная проверка результата. Э. Бет так сформулировал эту концепцию Пуанкаре: «Подготовка, инкубация, вдохновение и проверка» [цит. по 37].

Рассматривая проблемы математического мышления, и А.Пуанкаре, и Г. Вейль указывают на опасность языка и сложных формулировок, нечеткости большинства понятий, полагая, что математика имеет дело только с четкими сущностями. Эта проблема важна и в наше время, хотя взгляд математиков на строгость и четкость многих математических сущностей во второй половине XX века стал менее жестким и категоричным.

Проповедник интуиционизма Л. Брауэр вообще считал, что «язык изначально не точен, неоднозначен». Устранить эту неточность, по мнению Брауэра, невозможно. Бесплезны любые попытки формализовать этот язык, создать язык, термины которого истолковываются строго однозначно; ничто не может быть гарантией от искажения мыслей при их передаче. Поэтому, в построении математического знания «язык не играет никакой другой роли, кроме как эффективной, но не безошибочной и точной техники для запоминания математических построений и сравнения их с другими» [цит. по 37].

В связи с этой проблемой известен афоризм Брауэра «Научная точность заключается в человеческой мысли».

А. Гейтинг говорит в этом случае о создании «математической духовной установки» у слушателей. У него есть и более радикальное заявление по этому поводу: «Если действительный путь науки – формализация языка, то интуиционистская математика не принадлежит к науке в этом смысле слова» [13]. И что «для математической мысли характерно, что она не выражает истину о внешнем мире, а связана исключительно с умственными построениями».

Но среди математиков бытует и иное убеждение. Например, известный российский математик Ю.Манин считает, что «математика – это язык, полный тонких и полезных метафор» [28].

Комментируя роль языка в математике и близость математики к лингвистике, Ю.Манин приводит следующие аргументы: «С другой стороны не можем мы также и опустить слова и иметь дело только с формулами. Слова в математических и естественно-научных текстах играют три основные роли. Во-первых, они обеспечивают многочисленные связи между физической реальностью и миром математических абстракций. Во-вторых, слова несут оценочные суждения (иногда явные, иногда неявные), которыми мы руководствуемся при выборе тех или иных цепочек математических рассуждений в огромном дереве «всех» допустимых, но по большей части бессодержательных формальных выводов. Наконец (в-третьих) (последнее по счету, но не по важности), слова позволяют нам общаться, учить и учиться» [28].

Во второй половине XX века в математике начинает бурно прогрессировать категория нечеткости, породившая «лингвистический подход, в соответствии с которым в качестве значения переменных допускаются не только числа, но и слова или предложения естественного или искусственного языка. Такие переменные составляют основу нечеткой логики и приближенных способов рассуждений, которые могут оказаться более созвучными сложности и неточности гуманистических схем, чем обычные численные методы анализа» [18].

С точки зрения классической математики, это, конечно, нонсенс и еще большая ересь, чем интуиционизм.

Но это есть тот рост математики в глубину, о котором говорил А.Тарский и отмечал, что «логические законы постоянно меняются – будь то сознательно или бессознательно – в математических рассуждениях» [47].

И всё это, на мой субъективный взгляд, есть наглядные признаки эволюции математики и математического мышления (против чего категорически возражают российские философы математики, именующие себя фундаменталистами – в первую очередь – В.Я. Перминов и В.В. Целищев).

Если отталкиваться от Г.Фреге, пытавшегося тотально логизировать математику и утверждавшего, что «мышление всюду одинаково, нужно только освободить его от психологических влияний и от внешней помощи мышлению, таких как язык, знаки чисел и т.п.» [52] и от А.С. Есенина-Вольпина, изгонявшего веру из оснований математики, с целью добиться, чтобы все доказывалось (кстати, возможно, отец-прародитель наших «фундаменталистов», о чем они скромно умалчивают – А.В.) [17], то можно убедиться, что на протяжении последних 120 лет эволюция логики (и у логики есть своя эволюция!) шла по пути, озвученному А.А. Марковым: «В самой идее неединственности логики, разумеется, нет ничего удивительного. В самом деле, с какой стати все наши рассуждения, о чем бы мы не рассуждали, должны управляться одними и теми же законами? Для этого нет никаких оснований. Удивительным, наоборот, было бы, если бы логика была единственна» [29].

Естественно, что также эволюционирует наука математика и математическое мышление многих математиков (но далеко не всех). И, конечно же, эволюция математического мышления обычно протекает вне тесной связи с логикой, а по своим, малоизвестным современной науке, законам (потому так редко кто пытается исследовать эти законы:

математикам – всегда недосуг, а психологи и когнитивисты просто боятся подходить к дебрям математических абстракций).

7. Эволюция доказательства.

«Если истинная цель глубокой и фундаментальной математики состоит в том, чтобы, как сказал Гротендик, создать очевидное, то все длинные, скучные и незапоминающиеся доказательства – это всего лишь как костыли для хромых и убогих, и они могут быть исцелены в конце математической дороги. Можно сказать, что именно к этой «ясности» стремился Декарт» – так образно формулирует свою мысль об эволюции доказательства известный философ математики Ян Хакинг [53].

Я не совсем согласен с его сопоставлением Гротендика с Воеводским, и что эти математики представляют собой квинтэссенцию картезианского и лейбницевского пути доказательства. Это, как нередко бывает у философов, долгая история или бесконечный спор о поисках многочисленных дефиниций.

Попытаюсь пример Я.Хакинга заменить более простым и наглядным сравнением.

Академик В.М. Глушков однажды приводил в пример коллегам одно доказательство, объемом 288 страниц [36].

В настоящее время отдельные доказательства достигают тысячи и более страниц. Много ли найдется желающих прочесть и понять этот текст математиков? А тем более – досконально проверить такое доказательство. А ведь это все более распространяющаяся в среде современных математиков тенденция. На проверку решения Григория Перельмана («доказательства гипотезы Пуанкаре») ушло два года работы коллектива 4 известных математиков (говорят, что проверка эта вполне прилично оплачивалась), хотя объем доказательства был намного меньше чем тысяча страниц.

Сейчас бурно развивается отрасль «машинной» или компьютерной проверки доказательств, но и там хватает своих проблем и препятствий. Хочу сказать, что мне больше «по душе» доказательства конца XVIII и начала XIX

, когда было больше «образности» и меньше многозначных непроходимых дебрей.

Мне более приятна математика, о которой рассказывает в своем интервью М.Концевич: «Сложное доказательство – не очень хороший признак. Я предпочитаю заниматься простыми вещами, которые можно объяснить в двух словах, буквально на полустраничке» [24].

Понятно, что эту полустраничку поймут немногие, но такой лаконичный стиль можно назвать «гуманитарной математикой», а не математикой искусственного интеллекта.

Или, как писал А.Гротендик: «Миллионы математико-дней бессильны породить такую нехитрую штуку как «нуль», с появлением которого наше представление о числе совершенно преобразилось» [14].

Но все выше сказанное – лишь мое субъективное предпочтение. Оттого мне так симпатичен Максим Концевич, хотя я знаю о его творчестве только из различных интервью и не имею реального представления о его математических текстах. Но мне не симпатичен, скажем, советский гений А.Н.Колмогоров, с его теорией вероятностей, также как Г.Кантор (и их многочисленные последователи) с его метафизической и всеядной теорией множеств.

Это всего лишь взгляд со стороны гуманитария, пребывающего в поиске смысла математической истины и красоты (доступной единицам).

Я прочитал, скажем, М.Клайна «Математика. Утрата определенности» [23], С.Кранца «Изменчивая природа математического доказательства» [25], и верю им, что природа математического доказательства постоянно эволюционирует, потому, что это общий закон природы, из которого нет исключений (разве только – «вечный двигатель»). Мы живем в эволюционирующей вселенной, где «всё течет и всё изменяется». И почему я должен верить, скажем, известному философу математики В.Я. Перминову [38], который утверждает, что у математики свои законы, и она не подчиняется естественно-научным законам?

Прошу извинения у моего редкого и неведомого мне читателя за небольшое эмоциональное отвлечение. Но философ, помимо того, что он во всем может сомневаться, он всё же должен во что-то верить. Либо в эволюцию (в которой я тоже время от времени сомневаюсь), либо в бесконечность, либо в вечную истину...

8. Статус истины.

Много лет назад (а точнее – 23 сентября 1992 года) я вычитал в научно-популярной книге «Превратности научных идей» такую любопытную мысль: «Тьма завоеванных математикой истин на долгое время оседает невосстребованными решениями, не отыскавшими своего пути к практической цели формулами, уравнениями» [46].

За двенадцать лет до этого, в сентябре 1980 года, меня «шокировало» философское понятие «абсолютной истины». С тех пор, время от времени, я наталкиваюсь на «философский камень научной истины» и не могу никуда его пристроить (в системе собственного мировоззрения) и не решаюсь разбить его каким-нибудь «интеллектуальным технологическим молотом», чтобы убрать с дороги, ведущей к пониманию истинного смысла бытия личности и бытия человеческого разума...

Анри Пуанкаре, размышляя о ценности математической науки, сделал однажды такое философское высказывание: «Отыскание истины должно быть целью нашей деятельности; это – единственная цель, которая достойна её... однако истина иногда пугает нас... Это какой-то призрак, который на мгновение показывается перед нами только затем, чтобы беспрестанно исчезать, что надо гнаться за ней все дальше и дальше, и что никогда не возможно достигнуть её... Она бывает подчас жестока, и мы спрашиваем себя, не является ли иллюзия не только более утешительной, но и более надежной. Ведь она дает нам уверенность» [42]. После нескольких возвышенных и уводящих рассуждений, Пуанкаре восклицает: «И все же, не надо бояться истины, потому что только она прекрасна» [42].

Очень неубедительное заявление, и с точки зрения научной истины и с точки зрения моральной. Почему? Потому что похоже на утешительный самообман. Ведь иллюзия может быть не менее прекрасна, чем истина. И также являются движущей силой (вспомните Колумба, и многих других, что были вдохновлены обманчивой, но сильной и красивой иллюзией, верили в неё и полагали её достоверной истиной).

Естественно, что я отдаю себе отчет в том, что злоупотребляю цитированием, но это соблазн, которого трудно избежать: ведь кто бы стал читать умозрительные рассуждения никому неизвестного автора, тем более по поводу такому серьезному, как сущность и смысл математического мышления и математического творчества, и по поводу иных философских аспектов такой великой, единственной и неповторимой науки, как математика?

А так, глядишь, между цитатами гигантов мысли и познания, может затесаться скромная мысль неизвестного автора, которая вдруг покажется не такой уж безнадежной и бессмысленной. Такова моя иллюзия, таково мое утешение, заставляющее меня искать умные мысли, вставлять их в ткань своего текста, как самоцветные камни, сверкающие на солнце всеми гранями своего природного благородства.

Такое небольшое отвлечение в стиле медитаций позднего А.Гротендика.

Кстати, о Гротендике (самом выдающемся математике второй половины XX века). Одно из его сокровенных признаний: «Я всегда чувствовал, что математикой занимаются для того, чтобы передать знания другим, как будто некая башня на твоих глазах строится сообща, и ты приносишь свой камень. Это «башня» и есть математика, а вернее – наше знание о математическом мироустройстве» [14].

Философы математики – фундаменталисты В.Я. Перминов [38] и Е.М. Вечтомов [5] в своих текстах нередко ссылаются на Георга Гегеля, говоря о достижении математикой в отдельных случаях абсолютного знания или

абсолютной истины. Мне трудно понять смысл такой ссылки, ибо Гегель заканчивает свою «Феноменологию духа» совершенно мистической фразеологией: «Цель, абсолютное знание, или дух, знающий себя в качестве духа, должен пройти путь воспоминания о духах, как они существуют в нем самом и как они осуществляют организацию своего царства. Сохранение их [в памяти], если рассматривать со стороны их свободного наличного бытия, являющегося в форме случайности, есть история, со стороны же их организации, постигнутой в понятии – наука о являющемся знании; обе стороны вместе – история постигнутая в понятии, - и составляют воспоминания абсолютного духа и его Голгофу, действительность, истину и достоверность его престола, без которого он был бы безжизненным и одиноким; лишь – из чаши этого царства духов пенится для него его бесконечность» [12].

Где здесь можно углядеть прочный смысл и аподиктическую достоверность для математической истины – мне не понятно.

В этом отношении (касательно достоверности математической истины) мне гораздо ближе более однозначная определенность Иммануила Канта: «Математика, естествознание и даже эмпирическое знание о человеке имеют высокую ценность, как средства главным образом, для случайных целей, а если они в конце концов становятся средством для необходимых и существенных целей человечества, то это достигается не иначе, как при посредстве познания разума на основе одних лишь понятий, которое, как бы мы не называли его, собственно, есть не что иное, как метафизика. Поэтому-то метафизика есть необходимое завершение всей культуры человеческого разума, необходимое даже и в том случае, если мы отвергаем её влияние как науки на известные определенные цели. В самом деле, она рассматривает разум со стороны элементов и высших максим, которые должны лежать в основе самой возможности некоторых наук и применения всех наук» [19].

По моему разумению, Кант говорит здесь о наличии более высокого смысла, чем погоня за эфемерными истинами и растворение в высших

абстракциях интеллектуальных игр. Он говорит здесь о человеческом измерении земного разума и его полном осуществлении в виде высшего смысла человеческой культуры и общечеловеческого бытия.

Линия Лейбниц-Больцано-Фреге-Гуссерль сыграла в истории математики злую шутку (сюда же можно добавить и Кантора). Впрочем, это имело и имеет значение не только для математики, но и для философии, и в целом – для всей системы научного познания.

Логико-формалистская претензия на построение окончательной (абсолютной) системы знания, была (и есть) ориентирована на устранение всего субъективного и случайного, в том числе и самого человека, как познающего субъекта. Квинтэссенцию этой линии выразил Э.Гуссерль в своих «Картезианских размышлениях»: «... Науки как факты культуры и науки в истинном и подлинном смысле – не одно и то же, и первые, кроме своей фактичности, заключают в себе еще некое притязание, которое как раз в голой фактичности не удостоверяется как уже исполненное. Именно в этом притязании заключена наука как идея – идея подлинной науки» [15].

9. Притязания математики.

Гуссерль, как и Фреге, претендовал в своей феноменологии на создание философии как подлинной науки, освобожденной от всякой субъективности и культурных наслоений (первоначально увлекшись психологией, но под влиянием антипсихологиста Фреге, ставший борцом за изгнание всего психологического из философии и науки). Фреге, увлекшись превосходством Канта в философии и мечтавший дать последнее, абсолютно очищенное основание математики, также притязал (не афишируя этого, как делали позднее Гуссерль, Витгенштейн и Рассел) на звание первого и истинного философа.

По большому счету, здесь мы имеем тотальное отрицание субъективности или естественно-человеческого личностного начала во имя утверждения личностных амбиций одного субъекта, избравшего себя

«властителем дум» и представителем абсолютного духа (наиболее ярко этот феномен проявился у Гегеля).

Артур Шопенгауэр, непризнанный и ущемленный Георгом Гегелем, в своем действительно уникальном произведении «Мир как воля и представление» [2 том глава 13 «О методологии математики»] таким образом формулирует притязания математики и математиков: «Предполагаемая надпись в академии Платона «Не знающий геометрии да не входит!», которой так гордятся математики, несомненно объясняется тем, что Платон рассматривал геометрические фигуры как среднее, между вечными идеями и отдельными вещами, о чем часто упоминает в своей метафизике Аристотель. К тому же противоположность между самодавляющими вечными формами, или идеями, и преходящими вещами легче всего уяснить на геометрических фигурах и положить этим основу для учения об идеях, которое составляет центр философии Платона... он рассматривал геометрию как подготовительное обучение, приучающее дух учеников заниматься бестелесными предметами, после того как в практической жизни они имели дело только с телесными вещами. В таком, следовательно, смысле Платон советовал философам заниматься геометрией, и давать этому более широкое толкование мы не имеем права. Со своей стороны я рекомендую в качестве исследования о влиянии математики на наши дузовные силы и о её пользе для научного образования вообще... работу У.Гамильтона под заглавием «О пригодности и непригодности математики» (1836 г.). Вывод автора состоит в том, что ценность математики лишь опосредствующая, а именно, в применении к целям, которые могут быть достигнуты только посредством неё; сама же по себе математика оставляет дух на той стадии, где она его нашла, и не только не способствует общему образованию и развитию, а скорее, даже препятствует им... Единственная непосредственная польза, которую автор признает в математике, состоит в том, что она может приучить рассеянных и неустойчивых людей фиксировать свое внимание на

одном предмете. Даже Декарт, самый знаменитый математик, придерживался такого же мнения о математике» [55].

Многим позднее, когда уже произошел «взрыв» бифуркации и размножения тотальных конструкций нового времени в математике, и когда она стала претендовать на «науку наук» и главного создателя «вечных абстрактных истин», а именно в 1913 году, создатель философской антропологии М.Шелер в работе «Формализм в этике и материальная этика ценностей» формулирует притязания математики уже несколько иным образом: «... Позитивная математика, которая полностью отлична от философии математики, т.е., учения о сущности числа, множества, группы, величины – не только познает одни и те же предметы, но, кроме того, естественное созерцание следует одним и тем же самым сущностным взаимосвязям и законам фундирования данности, что и научное созерцание – хотя математика и превосходит естественное созерцание в определенности и в объеме... Аналогично, существуют строгие законы, которые основываются на сущности «знака» и символической функции вообще и которые в естественных языках выполняются с тем же успехом, что и в покоящихся на конвенции терминологиях ученых – и которые не объясняет никакая психология... Однако естественное мировоззрение бесконечно богаче, чем наука, «полнотой» содержания каждого предмета такой относительности и соответствующей ей «адекватностью» познания... Всякая искусственная терминология и все конвенции сущностно предполагают это «понимание» и само существование группы как сообщества. Естественный язык при этом – самый важный вид этого естественного выражения, а его слова и синтаксис суть его единицы и структура» [54].

Если выразить вышесказанное на популярном доступном языке, то получится примерно так: «Математики, как правило, очень гордятся, что они математики. Источник гордости они видят в своей науке – причем не столько в той пользе, которую приносит математика, сколько в том, что это такая уникальная, ни на какую другую непохожая область знаний» [50].

Спору нет – математики любят гордиться своей наукой и воспевать её неповторимые черты. Еще несколько примеров.

1) «Строго говоря, все наши знания за пределами математики и доказательной логики (которая фактически является ветвью математики) состоят из предположений... Мы закрепляем свои математические знания доказательными рассуждениями. Математическое доказательство является доказательным рассуждением... Доказательное рассуждение имеет жесткие стандарты» [39].

2) «Ведь высшее назначение математики как раз и состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает» [6].

3) «Я хотел бы сказать: математика – это разнообразие техник доказательства, - и на этом основывается её многообразная применимость и её важность» [10].

4) «Значение математики находится в бесконечном историческом процессе ее изменений. Поскольку математическая истина всегда меняется, она остается вне досягаемости отдельных людей» [48].

Но есть и не мало других высказываний, вызывающих сомнения в исключительных притязаниях математики.

5) «Математику можно определять как предмет, в котором никогда не известно ни то, о чем мы говорим, ни истинно или ложно то, что мы говорим» [43].

6) «Математика – одна из разновидностей человеческой деятельности, и она подвержена всем слабостям и порокам, присущим всему человечеству» [23].

7) «Математика – это изучение структуры и порядка, наука, особо привлекательная для людей с аутическими наклонностями» [53].

8) У Мориса Клайна есть наглядный пример, который вносит большие сомнения в миф об удивительной строгости и надежности математики: «Анри Пуанкаре называл теорию множеств болезнью и считал её своего рода патологией. «Грядущие поколения, - заявил он в 1908 году, -

будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они излечились». В 1926 году Гильберт так отозвался о трудах Кантора: «Мне представляется, что это самый восхитительный цветок математической мысли и одно из величайших достижений человеческой деятельности в сфере чистого мышления» [цит. по 23].

По моему, сугубо гуманитарному рассуждению, теория множеств породила в философии деконструктивизм и деструкции – такие же патологические явления. Интуитивно – я на стороне Пуанкаре. И хотя теория множеств процветала практически весь XX век, я надеюсь, что в XXI веке мы все такие излечимся от этой напасти, если конечно, сохраним естественный человеческий интеллект.

10. Феномен инсайта.

Как отмечает А.Пуанкаре в своем докладе «Математическое творчество»: «Видимость внутреннего озарения является результатом длительной неосознанной работы, и она возможна, когда предшествует ей длительная сознательная работа» [42].

Жак Адамар в своем «Исследовании психологии процесса изобретения в области математики» [1] вносит изрядную путаницу в описание психической сущности бессознательных и сознательных процессов мышления математиков.

По результатам его анкетного опроса и его собственным наблюдениям математики редко видят «математические сны». Я думаю, что такой вывод может опровергнуть не только серьезный психоаналитик, но и любой студент, изучавший математику и готовившийся интенсивно к очередному экзамену.

Во-вторых, у Адамара постоянно сознательные процессы уходят в бессознательные: память у него бессознательная, здравый смысл – тоже, и даже идеи со временем становятся все более бессознательными (что, на мой взгляд, весьма сомнительно).

Затем, озарение у него тоже самое, что и вдохновение. Может быть, с точки зрения математика, это одно и тоже, но психологическая наука серьезно разделяет эти проявления человеческой психики.

«Вдохновение – состояние своеобразного напряжения и подъема духовных сил, творческого волнения у человека, ведущее к возникновению или реализации замысла и идеи произведения науки, искусства и техники. Характерно повышенной общей активностью, необычайной продуктивностью деятельности, сознанием легкости творчества, переживанием «одержимости» и эмоционального погружения в творчество» [44].

«Озарение (инсайт) – внезапное, мгновенно возникающее и невыводимое из прошлого опыта новое понимание, постижение существенных отношений, задач, проблем и структуры ситуации в целом, посредством коего достигается осмысленное решение проблемы» [44].

Согласитесь, весьма разные проявления или психические феномены. Конечно, не исключено, что в процессе вдохновения могут происходить инсайты (или внезапные открытия, связанные с проявлением идей и решений, возникающих из подсознания или бессознательного), но чаще – инсайты приходят совершенно неожиданно и обычно не связаны с вдохновением.

У русского философа И.И. Лапшина есть замечательный труд «Философия изобретения и изобретение в философии» [26]. Кроме прочего, в главе «Творческая интуиция ученых» он приводит примеры инсайтов у математиков. Пример Гаусса. «В течение четырех лет редко проходила неделя, чтобы я не попробовал путем тех или иных тщетных попыток распутать эти узлы, с особенным азартом, преимущественно за последнее время. Тем не менее, все потуги, все усилия были тщетны и всякий раз я должен был с грустью откладывать перо... Наконец два дня тому назад я добился результата, но не благодаря моим ревностным поискам, а, я прямо сказал бы, по милости Божией. Загадка разрешилась, точно молния

сверкнула, я сам не был бы в состоянии восстановить нити между, с одной стороны, тем, что я раньше знал, что входило в мои предшествующие попытки, и тем, что привело к желанному результату « (Письма Гаусса к Ольбергу).

В данном случае мы имеем описание типичного инсайта, имевшегося также у А.Пуанкаре при описании идеи, связанной с фуксовыми функциями, явившейся ему, когда он ступал на подножку омнибуса [42].

Но инсайт вовсе не такое уж редкое явление. Чаще всего говорят так: «Мне пришла идея» при решении какой-то задачи или житейской проблемы.

В «Математическом открытии» Д.Пойа мы имеем описание таких случаев: «Именно так могут выглядеть переживания решающего, сопровождающие решение задачи: идея – это внезапное просветление, вносящее ясность, порядок, связь и целесообразность в детали, которые до этого казались смутными, разбросанными, запутанными, неуловимыми... Очень часто полезная идея возникает внезапно. Она вносит существенно новый важный элемент и меняет нашу точку зрения» [40].

Довольно нетривиальную трактовку неизбежности инсайта в математическом, философском и научном творчестве приводит логик и методолог В.А. Карпунин в работе «Онтологический аргумент»: «Можно сказать, что любое творчество, порождающее нечто принципиально новое (не сводимое к старому с помощью тех или иных интеллектуальных ухищрений, в частности с помощью некоторой искусственной «интерпретации» в терминах старого) движение нашей мысли основано на абстракции необозримости, нельзя раз и навсегда выразить технику нашего мышления, о чем мечтал в свое время Д.Гильберт. Человек не автомат, его сознание не логическая машина, точнее – не «только» логическая машина... Нельзя жить и думать только по алгоритму, неконструктивные (не укладывающиеся в заранее заданный алгоритм) выборы и в поведении человека, и в познании им мира, неизбежны... Различие между интуитивным и дискурсивным часто

рассматривается как различие между догадками и способами обоснования этих догадок» [21].

Несколько слов об озарении (инсайте) от М.Концевича: «Вы видите вдруг поразительные связи между разными частями математики, которых никогда никто не мог даже представить... Это самый главный объект теории струн. Об этом я думаю уже лет двадцать, и никаких идей пока нет. Сейчас у нас отсутствует понимание каких-то базисных вещей. И это понимание не следует ни из какого естественного развития знания – здесь нужно придумать что-то абсолютно новое. ... Ну, озарение озарением, но, честно говоря, у меня в основном это непрерывный процесс, что-то происходит, происходит, происходит – и вдруг оказывается, что уже всё понятно. Но в какой момент это произошло, иногда и не скажешь. Несколько раз мне какие-то идеи приходили во сне – пытался записывать, но буквы сразу исчезали. Просто мозг имитирует эйфорию от того, что то-то сложилось» [24].

Естественно, что в прикладной математике озарения (инсайты) необходимы в такой же степени, как и в чистой математике (граница между этими явлениями всегда была искусственной и неуловимой). Поэтому приведу мнение одного из выдающихся российских математиков прикладного направления второй половины XX века Никиты Николаевича Моисеева: «Интуиция, опыт исследователя, рассуждения по аналогии являются такими же «законными» способами получения информации, как и методы, использующие математические модели и чисто логические построения, связанные с их анализом. Эти методы не взаимозаменяемы и никогда не станут взаимозаменяемыми! Как бы ни были совершенны математические методы, они никогда не заменят догадки, озарения. И не только в нематематических дисциплинах, но даже и в самой математике» [32].

В исследовании и осмыслении (и практическом освоении) феномена инсайта никогда не следует забывать, что «всякая субъективная реальность

есть психическое... и любые изменения научных понятий и теорий первоначально совершаются в психической сфере» [16].

Как не следует забывать, что «каждое понятие в нашем сознании имеет свои собственные психические ассоциации. В то время как подобные ассоциации могут варьироваться по своей интенсивности (в соответствии с относительной значимостью понятия для нашей личности в целом, в соответствии с другими идеями и даже комплексами, с которыми оно ассоциируется в нашем бессознательном) они способны изменить «нормальный» характер понятия. По мере того как оно погружается ниже уровня сознания, оно может стать чем-то совершенно иным» [56].

При освоении ресурсов бессознательного и формирования синтетической техники (синергия сознательного и управляемых бессознательных процессов) математического мышления, математику в нашем XXI веке ждут просто удивительные открытия. Весь вопрос в том, сохранится ли естественная человеческая математика или мы бездарно сдадим свои ценности и устремления в полное распоряжение тотальному искусственному интеллекту. А это – вовсе не праздный вопрос.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Советское радио, 1970. 152 с
2. Бергсон А. Творческая эволюция: пер. с фр. – М.: КАНОН-пресс, 1998. – 384 с.
3. Вартофский М. Модели. Репрезентация и научное понимание. Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1988. – 507 с.
4. Вебер М. Избранные произведения. Пер. с нем. - М.: Прогресс, 1990. 808 с.
5. Вечтомов Е.М. Метафизика математики. Киров: Издательство Вятского ГГУ, 2006. — 508 с.
6. Винер Н. Я – математик. 2-е изд., стереотип. / Пер. с англ. – М.: Наука, 1967.
7. Винобер А.В. Гуманитарная археология математических наук. Очерк 7. Первые итоги // Биосферное хозяйство: теория и практика. 2023 № 9 (62). С. 39-57.
8. Винобер А.В. Введение в философию математики и системного анализа. Сборник статей. Электронное издание. Иркутск, 2022. 155 с.

Винобер А.В. Вольные философско-математические штудии. Сборник статей. Электронное издание. Иркутск, 2022. 160 с.

9. Винобер А.В. Гуманитарная археология математики: сборник статей [Электронное издание]. Иркутск. 2023. 108 с.

10. Витгенштейн Л. Замечания по основаниям математики // Философские работы. Ч. II. Кн.1. Пер. с нем. – М.: Гнозис. 1994. С. 3-206.

11. Гадамер Г. Истина и метод: Основы философской герменевтики. Пер. с нем. — М.: Прогресс, 1988. — 704 с.

12. Гегель Г. Феноменология духа. Пер. с нем. - М.: Наука, 2006. - 448 с.

13. Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. Пер. — М.: Мир, 1965. — 199 с.

14. Гротендик А. Урожай и посева. Размышления о прошлом математика: Пер. с франц. – Ижевск. 2001. 288 с.

15. Гуссерль Э. Картезианские размышления / Пер. с нем. СПб. : Наука, 2001. 320 с.

16. Дубровский Д.И. Проблема идеального. – М.: Мысль, 1983. 228 с.

17. Есенин-Вольпин А.С. Об антитрадиционной (ультраинтуиционистской) программе оснований математики и естественнонаучном мышлении // Семиотика и информатика. 1993. Вып. 33. С. 13-67.

18. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений./ Пер. с англ.-М.:Мир, 1976.-165 с.

19. Кант И. Критика чистого разума. Пер. с нем. – СПб.: ИКА Тайм-аут. 1993. 472 с.

20. Кант И. Прологомены /Пер. с нем. – М.:Академический проект, 2008. 174 с.

21. Карпунин В.А. Онтологический аргумент // Логос. Ленинградские международные чтения по философии культуры. Книга 1. Разум. Духовность. Традиции. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та. 1991. С. 118-134

22. Карсавин Л.П. Философия истории. – СПб.: АО Комплект. 1993. 351 с.

23. Клайн М. Математика. Утрата определенности. Пер. с англ. – М.: Мир. 1984. 434 с.

24. Концевич М. Предпочитаю заниматься простыми вещами, которые можно объяснить в двух словах : [интервью] / Беседова Е.Кудрявцева // Коммерсантъ Наука. 2022. 22 (25.10.2022). С. 38.

25. Кранц С. Изменчивая природа математического доказательства / Пер. с англ. 3-е изд., электр. – М.: Лаборатория знаний, 2020. 323 с.

26. Лапшин И.И. Философия изобретения и изобретение в философии - Введение в историю философии. – М.: Республика. 1999. 399 с.

27. Лосский Н.О. Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция. – М.: Республика, 1995.

28. Манин Ю.И. Математика как метафора. – М.: МЦНМО, 2008. 402 с.

29. Марков А.А.О логике конструктивной математики. – М.: Знание. 1972. 48 с.

30. Мацкевич В.В. Мышление // Новейший философский словарь / Сост. А.А. Грицанов. – Мн.: Изд. В.М. Скакун. 1998. С. 449-450.

31. Мертон Р. Социальная теория и социальная структура. Пер. с англ. - М.: АСТ, АСТ Москва, Хранитель, 2006.- 873 с.
32. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. – 488 с.
33. Морделл Л.. Размышления математика. Пер. с англ. – М., Знание, 1971. 32 с.
34. Мур Дж. Э. Природа моральной философии. Пер. с англ., сост. и прим. Л. В. Коноваловой. — М.: Республика, 1999. 351 с.
35. Налимов В.В. В поисках иных смыслов. – М.: Прогресс, 1993. – 280 с.
36. Панов М.И. ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ XX ВЕКА (Обзор) // Философия в XX веке. 2003. №2. С. 11-39. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/filosofiya-matematiki-xx-veka-obzor> (дата обращения: 07.09.2023).
37. Панов М.И. Методологические проблемы интуиционистской математики. – М.: Наука, 1984. 223 с.
38. Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. 320с.
39. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Пер. с англ. 2-е изд., исправ. – М.: Наука, 1975. 464 с.
40. Пойа Д. Математическое открытие. 2-е изд., стереотип. Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. 448 с.
41. Полани М. Личностное знание. Пер. с англ. — Под ред. В. А. Лекторского и В. И. Аршинова. – М.: Прогресс, 1985. – 343 с.
42. Пуанкаре А. О науке: пер. с франц.- М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. - 560 с.
43. Рассел Б. Введение в математическую философию. Избранные работы. Пер. с англ. – Новосибирск: Сибирское университетское издательство. 2007. 264 с.
44. Словарь практического психолога / Сост. С.Ю. Головин . -Минск: Харвест, 1998.
45. Словарь социально-гуманитарных терминов. Под ред. Айзенштадт А. Л.. М.: Тесей. 1999. 320 с.
46. Сухотин А.К. Превратности научных идей. – М.: Мол.Гвардия. 1991. 271 с.
47. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. Пер с англ. – М.: Гос. изд-во иностранной литературы. 1948. 321 с.
48. Тасич В. Математика и корни постмодернистской философии / Пер. с англ. В.В. Целищев. Серия Библиотека аналитической философии. - М.: Канон+ РООИ «Реабилитация». 2022. 368 с.
49. Тулмин Ст. Человеческое понимание. Пер. с англ. М.: Прогресс, 1984.- 328 с.
50. Успенский В.А. Апология математики. – М. : Альпина нон-фикшн, 2017. 622 с.
51. Фейерабенд П. Против метода. Очерк анархистской теории познания / Пер. с англ. – М.: АСТ, Хранитель. 2007. 414 с.

52. Фреге Г. Основоположения арифметики. Логико-математическое исследование о понятии числа. Перевод В.А. Суровцева. — Томск: Водолей, 2000. — 64 с.

53. Хакинг Я. Почему вообще существует философия математики? / Пер. с англ. В.В. Целищев. Сер. Библиотека аналитической философии. — М.: Канон+ РООИ «Реабилитация». 2020. 400 с.

54. Шелер М. Избранные произведения: Пер. с нем. — М.: Изд-во Гнозис, 1994. 490 с.

55. Шопенгауэр А. О воле в природе. Мир как воля и представление. Т.2. Пер. с нем. — М.: Наука, 1993. 669 с.

56. Юнг К.Г. Приближаясь к бессознательному //Глобальные проблемы и общечеловеческие ценности. Пер. с англ. и франц. — Сост. Л. И. Василенко и В. Е. Ермолаевой; введ. ст. Ю. А. Шрейдера. — М.: Прогресс, 1990.

A.V. Vinober

«Siberia Land Congress» Biosphere and Agriculture Economies Support and Development Fund, Irkutsk, Russia

ETHOS OF MATHEMATICS. THE FIRST ESSAY. MATHEMATICAL THINKING: INSIGHTS AND EVIDENCE

This essay is the beginning of the fourth cycle of philosophical studies on mathematics – it is a subjective view from the side of the humanities, devoid of reverence for the sacred and mythological traditions of the science of mathematics, but harboring an inexhaustible interest in mathematical creativity and the philosophical meaning of the entire category of mathematics. Essays (etudes or studies) represent a stream of free associations on the topic of what has been read and meaningful at different times and are focused primarily on the audience of readers who are not indifferent to the fate of natural human science in the XXI century. In this essay, the author examines mathematical thinking, the evolution of proof, the status of truth, the claims of mathematics and the phenomenon of insight.

Keywords: ethos of mathematics, mathematical thinking, proof, insight, psychology of mathematical creativity

Поступила в редакцию 8 ноября 2023